Sigorta Matematiği – Hayat
Sigorta Çeşitleri
3 Soru - 3 Cevap

Tam Hayat (whole life)

Kesikli

$$\boldsymbol{Z} = v^{K_x+1}$$

$$E[\boldsymbol{Z}] = A_x = \sum_{k=0}^{oo} v^{k+1}\ {}_kp_x\, q_{x+k}$$

Sürekli

$$\boldsymbol{Z} = e^{-\delta T_x}$$

$$E[\boldsymbol{Z}] = \bar{A}_x = \int_0^{oo} e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

$$Var[\boldsymbol{Z}] = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

Dönem Sigortası (term insurance):

Kesikli

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x < n \\ 0 & K_x \geq n \end{cases}$$

$$E[\boldsymbol{Z}] = A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\, q_{x+k}$$

Sürekli

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} e^{-\delta T_x} & T_x < n \\ 0 & T_x \geq n \end{cases}$$

$$E[\boldsymbol{Z}] = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

$$Var[\boldsymbol{Z}] = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)^2$$

Pure Endowment:

Kesikli /Sürekli

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} 0 & K_x < n \\ v^n & K_x \geq n \end{cases}$$

$$E[\boldsymbol{Z}] = A_{x:\overline{n}|\frac{1}{}} = {}_nE_x = v^n \, {}_np_x$$

$$E[\boldsymbol{Z}^2] = {}^2A_{x:\overline{n}|\frac{1}{}} = v^{2n} \, {}_np_x$$

S1. Ölüm anında ödenecek 100000 TL tazminatlı bir tam hayat sigortası 40 yaşındaki bir birey tarafından satın alınıyor. Ölümlülük oranı ve sürekli faiz sırasıyla;

$$\mu_{40+t} = \begin{cases} 0.04, & 0 \le t \le 20 \\ 0.01, & 20 < t \end{cases} \qquad \delta_{40+t} = \begin{cases} 0.05, & 0 \le t \le 20 \\ 0.03, & 20 < t \end{cases}$$

ise sigortalının ödeyeceği net tek primi bulunuz.

Çözüm:

$$\bar{A}_x = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \cdot \bar{A}_{x+n}$$

$$\bar{A}_{40} = \bar{A}^{1}_{40:\overline{20}|} + {}_{20}E_{40} \cdot \bar{A}_{60}$$

$$\bar{A}_{40} = \int_0^{20} e^{-0.05t} e^{-0.04t} 0.04 dt + e^{-0.05 \cdot 20} \cdot e^{-0.04 \cdot 20} \int_0^{oo} e^{-0.03t} e^{-0.01t} 0.01 dt$$

$$\bar{A}_{40} = 0.04 \cdot \left. \frac{e^{-0.09t}}{-0.09} \right]_0^{20} + e^{-20 \cdot (0.09)} \cdot \frac{0.01}{0.04} = 0.4123$$

Net tek prim: 100000 x 0.4123 = 41230 TL

S2. Ölüm anında $\boldsymbol{K}$ teminatı veren bir tam hayat sigortasının bugünkü değeri $\boldsymbol{Z}$ rassal değişkeni ile gösterilmektedir. Mortalite ve sürekli faiz oranları sırasıyla 0.04 ve 0.06 ile verilmekte ve bu sigortanın net tek priminin $Var(\boldsymbol{Z})$ değerine eşit olduğu bilinmektedir. O halde $\boldsymbol{K}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$E(Z) = Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$K\frac{\mu}{\mu+\delta} = K^2\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(K\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2$$

$$K\frac{0.04}{0.04+0.06} = K^2\frac{0.04}{0.04+0.12} - \left(K\frac{0.04}{0.04+0.06}\right)^2$$

$$\boldsymbol{K} = 4.44$$

S3. Ölüm anında 1 birimlik teminatı olan n yıllık bir karma sigortanın bugünkü değerine ait rassal değişken X; ölüm anında 1 birimlik teminatı olan n yıllık dönem sigortasının bugünkü değerine ait rassal değişken ise Y ile gösterilmektedir.

i. $Var(X) = 0.0078$
ii. $v^n = 0.3$
iii. ${}_np_x = 0.8$
iv. $E(Y) = 0.02$

$Var(Y) = ?$

Çözüm:

$$E[X] = \bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x \qquad (1)$$

$$Var(X) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)^2 = 0.0078 \qquad (2)$$

$$E[Y] = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = 0.02 \qquad (3)$$

(1) ve (3) numaralı denklemleri (2) no.'lu denklemde kullanarak:

$$Var(X) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\right)^2 = 0.0078$$

$$Var(X) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + v^n\,{}_np_x\right)^2 = 0.0078$$

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (0.02 + 0.3 \cdot 0.8)^2 = 0.0078$$

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 0.0754.$$

Özyineleme bağıntısından;

$${}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + v^{2n}\,{}_np_x$$

$$0.0754 = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + 0.3^2 0.8$$

$${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = 0.0034$$

O halde: $Var(Y) = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)^2 = 0.0034 - 0.02^2 = 0.003.$